Satz. Jeder Hauptidealring ist faktoriell.

Der Beweis braucht:

Lemma. Jede aufsteigende Kette von Idealen in einem Hauptidealring wird stationär.

Beweis des Lemmas. Sei A ein Hauptidealring und seien $I_k \subset A$ Ideale in A für $k \in \mathbb{N}$ mit $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ (d.h. die I_k bilden eine aufsteigende Kette von Idealen). Wir müssen zeigen, dass es ein $N > 0$ gibt, so dass $I_n = I_N$ für alle $n \geq N$ (d.h. die Kette wird stationär).

Es ist $J := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ ein Ideal in A. Da A ein Hauptidealring ist, gibt es $a \in A$ mit $J = (a)$. Insbesondere $a \in J$, also gibt es ein I_N mit $a \in I_N$. Es folgt $(a) \subset I_n$ für alle $n \geq N$. Andererseits $(a) \supset I_k$ für alle k nach Definition von (a). $\square$

Beweis des Satzes. Für Hauptidealringe sind Primelemente und irreduzible Elemente das gleiche (2.3, Bem. 1). Nach 2.3, Satz 2 genügt es, zu zeigen, dass jedes $a \in A$ mit $a \neq 0$, $a \notin A^\times$ als Produkt von irreduziblen Elementen geschrieben werden kann. Sei

$$H = \{(a) \,|\, a \neq 0, a \notin A^\times \text{ und } a \text{ lässt sich nicht als Produkt von unz. El. schreiben}\}\,.$$

Wir werden zeigen, dass H leer ist.

Angenommen, H ist nicht leer. Dann enthält H ein maximales Element, d.h. ein Ideal (m), so dass für alle Ideale $I \in H$ gilt: $(m) \subset I \Rightarrow (m) = I$. Wäre dies nicht so, könnte man eine unendliche *echt* aufsteigende Kette $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots$ finden, im Widerspruch zum Lemma.

Per Definition von H ist m selber nicht unzerlegbar, also gibt es $a, b \in A$, $a, b \notin A^\times$, mit $m = ab$. Somit kann auch mindestens eines der Elemente a, b nicht als Produkt von unzerlegbaren Elementen geschrieben werden. Sei o.B.d.A. $(a) \in H$. Dann $(m) \subset (a)$ und da (m) ein maximales Element in H ist, gilt $(m) = (a)$. Aber dann $a = xm$ und somit $m = mxb$, bzw. $xb = 1$. Widerspruch zu $b \notin A^\times$. $\square$